

Varianta 8

Subiectul I

- a) $\bar{z} = \sqrt{3} - i$.
- b) $AC = 3\sqrt{2}$.
- c) $\sin \pi + \cos \pi = -1$.
- d) M este mijlocul segmentului $(BC) \Rightarrow AM = 3\sqrt{2}$.
- e) $S = 4\sqrt{3}$.
- f) $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Subiectul II

1.

- a) $x = -3$.
- b) $x_1 + x_2 = -1$.
- c) $x = 1$.
- d) $x = 1$.
- e) $p = \frac{3}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = e^x - 1$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{1}{2}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- d) $A(0, 0)$ este punct de minim local.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}} = 1$.

Subiectul III.

- a) Prin calcul direct se obține $A^2 = B^2 = O_2$.
- b) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- c) $\det A = 0 - 0 = 0$.

d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

e) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow (A+B)^{2007} = A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Din d) rezultă că $C^{2n} = I_2$ și $C^{2n+1} = C$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deci:

$$C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007} = 1003 \cdot I_2 + 1004 \cdot C = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ rezultă suma cerută}$$

este 2006.

g) $\begin{vmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2007 - 0 = -2007$.

Subiectul IV

a) $\int f(x)dx = \frac{-1}{2x^2} + C$.

b) $f'(x) = \frac{-3}{x^4} < 0, (\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

c) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$.

e) $\frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} \Leftrightarrow 2k^2 < 2k^2 + 3k + 1$, adevărat, $\forall k > 0$.

f) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \stackrel{e)}{<} 0$, deci șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.

g) Din $b_n = a_n + \frac{1}{2n^2}$ rezultă că $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șir strict crescător și din $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șir strict descrescător rezultă că $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_3 < b_2 < b_1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

Cum $a_1 = 1, a_2 = 1,125, b_3 = 1,2175 < 1,22$ rezultă concluzia.